IN 101 - Cours 05

7 octobre 2011

présenté par
Matthieu Finiasz

Un problème concret
Recherche de collisions

- Le paradoxe des anniversaires dit que $\sqrt{365}$ élèves sont suffisants (en moyenne) pour avoir une collision d'anniversaire,
  → deux élèves ayant leur anniversaire le même jour.
- Comment fait-on pour efficacement trouver ces "paires" d'élèves ?

IN101 - 2011-2012

Un problème concret
Recherche de collisions

- Le paradoxe des anniversaires dit que $\sqrt{365}$ élèves sont suffisants (en moyenne) pour avoir une collision d'anniversaire,
  → deux élèves ayant leur anniversaire le même jour.
- Comment fait-on pour efficacement trouver ces "paires" d'élèves ?
- Méthode simple :
  - on remplit un tableau avec les n dates d'anniversaire,
  - on compare chaque élément à tous les autres du tableau
    → complexité en $\Theta(n^2)$.
- Peut-on faire mieux ?

IN101 - 2011-2012

Un problème concret
Recherche de collisions

- Le paradoxe des anniversaires dit que $\sqrt{365}$ élèves sont suffisants (en moyenne) pour avoir une collision d'anniversaire,
  → deux élèves ayant leur anniversaire le même jour.
- Comment fait-on pour efficacement trouver ces "paires" d'élèves ?
- Méthode simple :
  - on remplit un tableau avec les n dates d'anniversaire,
  - on compare chaque élément à tous les autres du tableau,
    → complexité en $\Theta(n^2)$.
- Peut-on faire mieux ? → OUI
  - on trie le tableau,
  - on le parcourt en regarant si 2 voisins sont égaux,
    → complexité en $\Theta(n \log n)$.

Comment trier un tableau

Le tri
Description du problème

- On se donne un tableau de n éléments (des entiers par exemple) et une relation d'ordre totale $\leq$.
  - on effectue un tri par comparaison, utilisant uniquement $\leq$
  - la complexité est le nombre de comparaisons.
- Les algorithmes élémentaires ont une complexité en $\Theta\left(n^2\right)$.
- Les meilleurs algorithmes ont une complexité en $\Theta\left(n\log(n)\right)$.

En autorisant plus que des comparaisons, on peut parfois faire $\Theta\left(n\right)$.

Complexité variable
Quelques définitions

Complexité dans le pire cas

Temps de calcul dans le pire cas pour les entrées de taille n fixée :

$$T(n) = \max_{\{x,|x|=n\}} T(x).$$

Complexité moyenne

Temps de calcul moyen sur toutes les entrées de taille n fixée :

$$T_m(n) = \sum_{x,|x|=n} p_n(x)T(x).$$

(p_n) est une distribution de probabilité sur les entrées de taille n.

Tri par insertion
Si ça marche pour n, ça marche pour n + 1

```
1  void insertion_sort(int* tab, int n) {
2    int i,j,tmp;
3    for (i=1; i<n; i++) {
4      tmp = tab[i];
5      j = i-1;
6      while ((j >= 0) && (tab[j] > tmp)) {
7        tab[j+1] = tab[j];
8        j--;
9      }
10     tab[j+1] = tmp;
11   }
12 }
```

- L'élément i est rangé parmi les $i-1$ premiers éléments (déjà triés) :
  - insérer un élément coûte au pire i en moyenne $\frac{i}{2}$,
  - complexité en $\Theta\left(n^2\right)$ dans le pire cas (tableau inversement trié),
  - complexité moyenne en $\Theta\left(n^2\right)$ aussi.

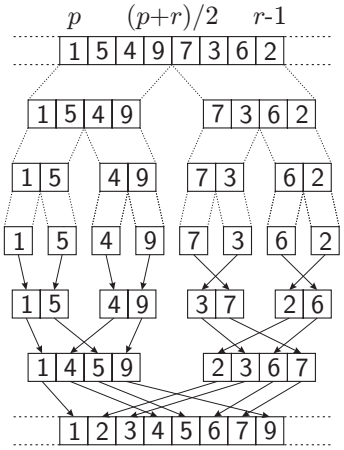
Tri à bulles

- L'idée est de faire remonter les grands éléments à la fin du tableau
  - on parcourt le tableau en comparant l'élément i au $i+1$ et on les inverse si nécessaire,
    - → à la fin du parcours, le dernier élément est le plus grand, après i parcours les i plus grands éléments sont à la fin.
  - on fait $n-1$ parcours et la tableau est trié.
- Complexité : on effectue $\Theta(n)$ parcours comportant $\Theta(n)$ comparaisons à chaque fois,
  - le tri à bulles a une complexité de $\Theta(n^2)$ dans le pire cas et en moyenne.
- Pour améliorer un peu les performances, on arrête le tri dès que l'un des parcours n'inverse aucun éléments.
  - Ce tri ne fait que $\Theta(n)$ comparaisons sur un tableau déjà trié.

Tri fusion

Si ça marche pour $\frac{n}{2}$, ça marche pour n

- Insérer un éléments dans un tableau trié coûte $\Theta(n)$,
  - fusionner deux tableaux de taille $\frac{n}{2}$ coûte aussi $\Theta(n)$.

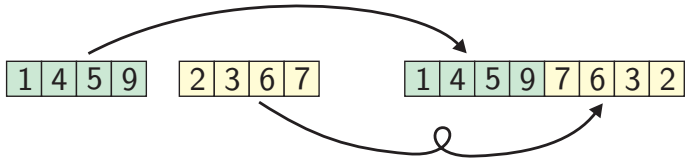


- On cherche à réduire le problème :
  - on coupe le tableau en deux,
  - on trie chaque moitié,
  - on fusionne.
- Le coût total est celui des fusions :
  - chaque fusion coûte $\Theta(r-p)$,
  - le coût total est $\Theta(n\log(n))$,
  - dans le pire cas et en moyenne.

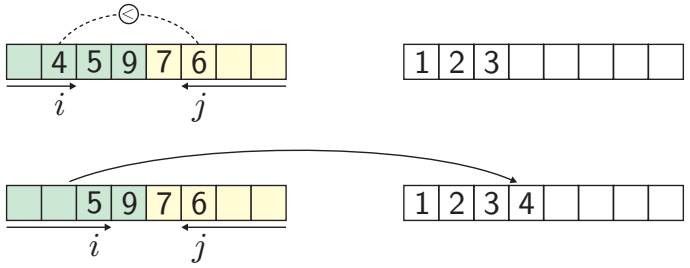
Tri fusion

Fusion des sous-tableaux

- On commence par recopier "dos à dos" les 2 tableaux (coût $\Theta(n)$),



- puis on parcourt par les deux bouts en avançant du plus petit côté à chaque fois (coût $\Theta(n)$ aussi).



Tri rapide

Quicksort

- Tri récursif basé sur un partitionnement :
  - on choisit un pivot,
  - on permute les éléments du tableau
    - → les petits au début, puis le pivot, puis les grands,
  - on trie les petits entre eux et les grands entre eux.

```
1 void quick_sort(int* tab, int p, int r) {
2   if (r-p > 1) {
3     int q = partition(tab,p,r);
4     quick_sort(tab,p,q);
5     quick_sort(tab,q+1,r);
6   }
7 }
```

- Très rapide, peut être fait en place :
  - complexité dans le pire cas $\Theta(n^2)$,
  - complexité en moyenne $\Theta(n\log(n))$.

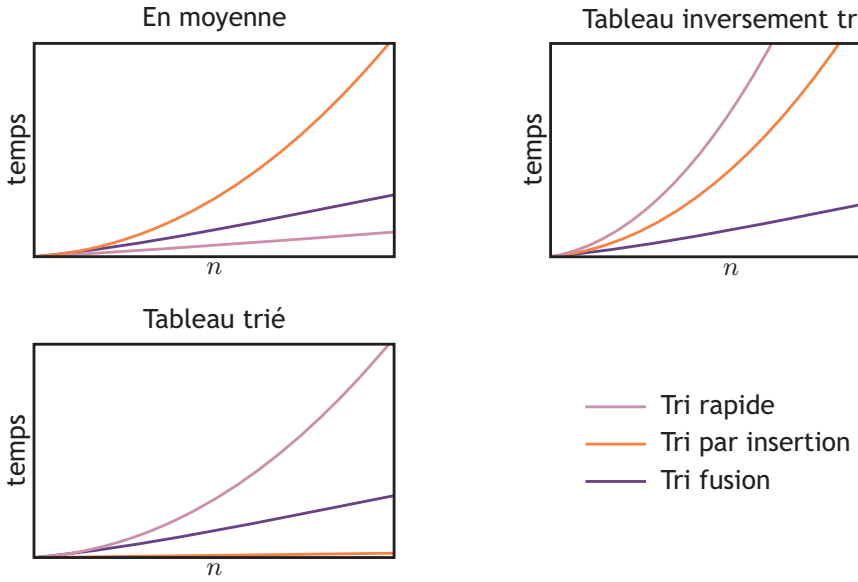
- La fonction `partition` effectue $r - p - 1$ comparaisons.

```
1  int partition(int* tab, int p, int r) {
2    int x = tab[p];
3    int q = p;
4    int i,tmp;
5    for (i=p+1; i<r; i++) {
6      if (tab[i] <= x) {
7        q++;
8        tmp = tab[q];
9        tab[q] = tab[i];
10       tab[i] = tmp;
11     }
12   }
13   tmp = tab[q];
14   tab[q] = tab[p];
15   tab[p] = tmp;
16   return q;
17 }
```


Complexités comparées
Asymptotiquement

Algorithme	Cas le pire	En moyenne
Tri par insertion Tri à bulles	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Tri rapide	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n\log(n))$
Tri fusion	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(n\log(n))$

Complexités comparées
En pratique



Application
L'algorithme "quickselect"

- Pour trouver la médiane (ou le k-ième élément) d'un tableau :
  - on peut trier le tableau et prendre l'élément $\frac{n}{2}$,
    - ⇾ coûte $\Theta(n\log n)$.
  - mais cela n'est pas nécessaire...

- On s'inspire du tri rapide :
  - on conserve la ligne : `int q = partition(tab,p,r);`
  - au lieu de 2 appels récursifs, on n'en fait qu'un
    - ⇾ selon que $q < \frac{n}{2}$ ou $q > \frac{n}{2}$,
  - on ne fait qu'une partie du tri, le minimum nécessaire,
    - ⇾ la complexité moyenne est $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots = 2n = \Theta(n)$.

Complexité minimale d'un algorithme de tri

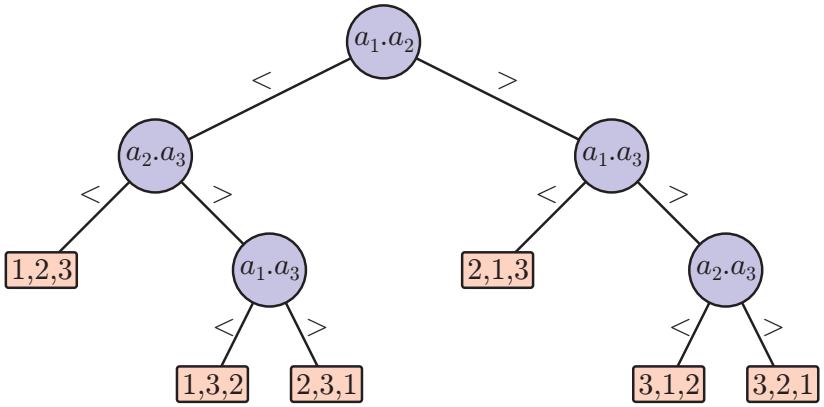
Complexité minimal d'un algorithme de tri

Tris par comparaison

- Un tri par comparaison prend en entrée n éléments
  - ne fait que des comparaisons → {1,4,3} est identique à {2,4,3}
  - $n!$ entrées possibles, selon l'ordre des éléments.
- Un algorithme de tri par comparaison fait une suite de comparaison, puis donne une permutation qui remet les éléments en ordre
  → se comporte différemment pour chacune des $n!$ entrées possibles.
- Un tel tri peut se représenter par un arbre binaire :
  - chaque nœud est une comparaison
  - en fonction du résultat on descend dans le fils gauche ou droit
  - chaque feuille correspond à une permutation
    → chaque entrée aboutit à une feuille différente.

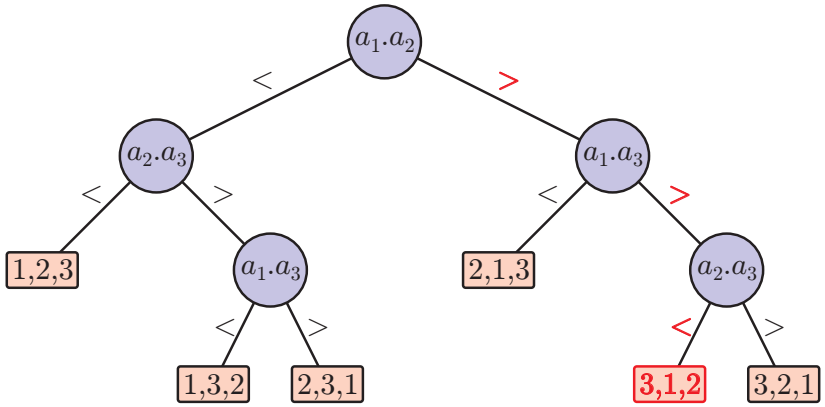
Complexité minimal d'un algorithme de tri

Exemple pour n = 3



Complexité minimal d'un algorithme de tri

Exemple pour n = 3



- Nombre de comparaison = longueur de la branche
  → cet arbre représente un algorithme qui trie en 3 comparaisons.

Complexité minimale d'un algorithme de tri

$\Theta(n \log n)$, pas mieux

- Un arbre de hauteur moyenne h contient au plus 2^h feuilles

$$2^h \geq \text{nombre de feuilles} = n!$$

$$h \geq \log(n!) > \log\left(\frac{n^n}{e^n}\right) = n \log n - n \log e$$

- h est aussi le nombre moyen de comparaisons
  - pour des entrées équidistribuées
    - → la complexité moyenne d'un tri est $\Omega(n \log n)$.
  - pour n'importe quelles entrées
    - → la complexité dans le pire cas est $\Omega(n \log n)$.

Récursivité

Algorithme récursif

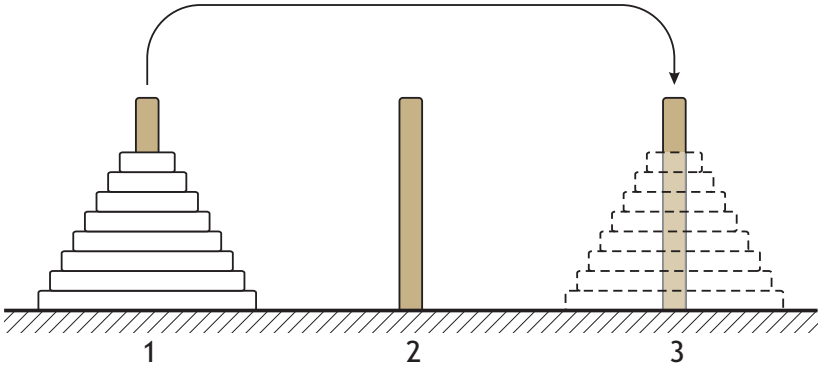
Un concept utile

Un algorithme récursif est un algorithme défini en référence à lui même, et qui comprend une condition de terminaison.

- Exemples : suite de Fibonacci, tri fusion, tri rapide...
  - souvent faciles à écrire et à comprendre
  - c'est le compilateur qui fait le travail
  - très différent d'une fonction normale !
- Permettent d'utiliser une approche « diviser pour régner » :
  - on divise le problème en sous-problèmes
  - on traite les sous-problèmes (récursivement ou directement)
  - on recombine les résultats.

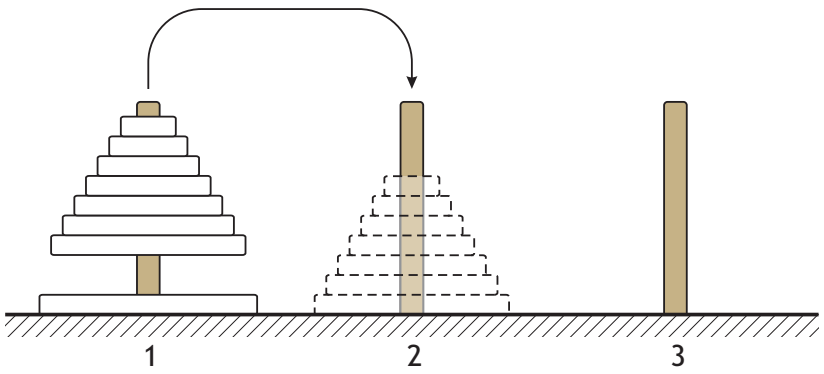
Les tours de Hanoï

- On cherche à déplacer n disques de la tour 1 à la tour 3
  - il est interdit de poser un disque sur un plus petit que lui
  - on déplace un seul disque à la fois.



Les tours de Hanoï

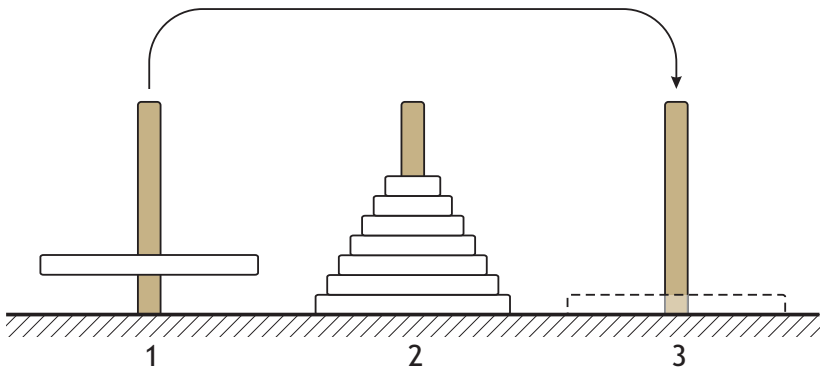
- On déplace récursivement $n-1$ disques vers la tour 2.



IN101 - 2011-2012

Les tours de Hanoï

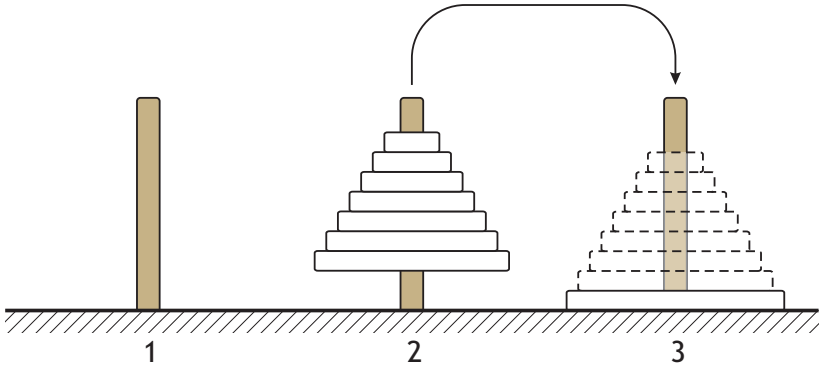
- Puis on déplace le grand disque à sa place.
- ⚠ Cette étape est nécessaire dans tout solution.



IN101 - 2011-2012

Les tours de Hanoï

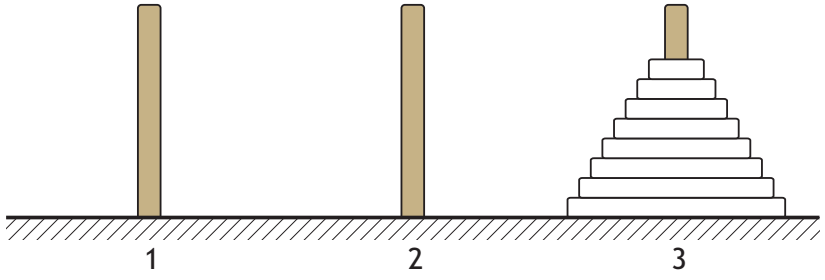
- On redéplace récursivement les $n-1$ petits disques vers la tour 3.



IN101 - 2011-2012

Les tours de Hanoï

- Et voila ! La magie de la récursion a encore une fois opérée...
  - on décrit en quelques étapes un algorithme exponentiel en n.



Les tours de Hanoï
Le code C de l'algorithme

- Cet algorithme affiche les opérations à effectuer :

```
1  void Hanoi(int n, int i, int j) {
2    int intermediate = 6-(i+j);
3    if (n > 0) {
4      Hanoi(n-1,i,intermediate);
5      printf("Mouvement de %d vers %d\n",i,j);
6      Hanoi(n-1,intermediate,j);
7    }
8  }
9
10 int main(int argc, char* argv[]) {
11   Hanoi(atoi(argv[1]),1,3);
12 }
```

Complexité d'algorithmes récursifs

IN101 - 2011-2012

IN101 - 2011-2012

Les tours de Hanoi
Complexité

- $T(n)$ le nombre de mouvements nécessaire pour déplacer n disques :
  - $T(0) = 0$ et $T(1) = 1$,
  - $T(n) = 1 + 2 \times T(n-1)$.

→ On obtient : $T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$.

- L'étape de mouvement du grand disque est nécessaire
  - cette complexité est intrinsèque au problème.
- La complexité spatiale est $\Theta(n)$
  - on ne stocke rien, mais on a n appels récursifs imbriqués.

Pour déplacer 50 disques, à 1 disque par seconde, il faut environ 35 millions d'années.

IN101 - 2011-2012

Tri fusion

- Calculer la complexité $T(n)$ en nombre de comparaisons :

$$T(n) = D(n) + R(n) + C(n).$$

- $D(n)$: coût pour diviser le problème en sous-problèmes. $D(n) = 0$
- $R(n)$: coût pour résoudre les sous-problèmes. Ici, deux sous-problèmes de taille $\frac{n}{2}$, donc $R(n) = 2 \times T(\frac{n}{2})$.
- $C(n)$: coût pour combiner les résultats. Ici, une fusion : $C(n) = n$.

$$\forall n \geq 2,\ T(n) = 2 \times T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

- Une telle équation admet comme solution $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Tri rapide

```
1 void quick_sort(int* tab, int p, int r) {
2   int q;
3   if (r-p > 1) {
4     q = partition(tab,p,r);
5     quick_sort(tab,p,q);
6     quick_sort(tab,q+1,r);
7   }
8 }
```

- `partition(tab, p, r)` nécessite $r - p - 1$ comparaisons,
  → on calcule la complexité de `quick_sort` comme précédemment.

Tri rapide

- Pour une entrée de taille n :
  - Division en deux sous-problèmes de taille $q-1$ et $n-q$, coût de `partition` : $D(n) = n - 1$.
  - Résolution des sous-problèmes : coût $R(n)$ variable selon la valeur de q.
  - Combinaison des résultats : coût $C(n) = 0$.

$$T(n) = n - 1 + \begin{cases} 2 \times T\left(\frac{n}{2}\right) & \text{meilleur cas} \\ \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} T(q-1) + T(n-q) & \text{cas moyen} \\ T(n-1) & \text{pire cas} \end{cases}$$

- On trouve les solutions :
  $T(n) = \Theta(n \log n)$ (meilleur cas et cas moyen),
  $T(n) = \Theta(n^2)$ (pire cas).

Fibonacci récursif
Complexité exacte

```
1 unsigned int fibo1(unsigned int n) {
2   if (n < 2) {
3     return n;
4   }
5   return fibo1(n-1) + fibo1(n-2);
6 }
```

- Si $T(n)$ est la complexité du calcul du n-ième nombre :

$$T(n) = \underbrace{T(n-1) + T(n-2)}_{R(n)} + \underbrace{1}_{C(n)}$$

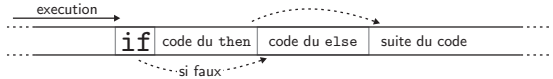
  - on fait un changement de variable $S(n) = T(n) + 1$ qui donne $S(n) = S(n-1) + S(n-2)$ et donc $S(n) = \Theta(\varphi^n)$.
- Comme annoncé précédemment $T(n) = \Theta(\varphi^n)$.

Les dessous de la récursivité

Compilation d'une fonction récursive

Le code produit par un compilateur est une suite d'instruction avec des sauts, c'est tout.

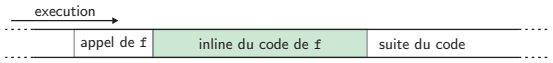
- Un `if` est un saut conditionnel :
  - soit on exécute l'instruction suivante, soit on fait un saut un peu plus loin.



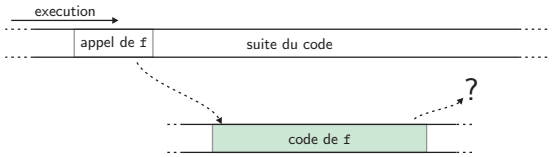
Compilation d'une fonction récursive

Le code produit par un compilateur est une suite d'instruction avec des sauts, c'est tout.

- Un appel à une fonction peut-être traité de deux façons :
  - soit on copie le code de la fonction (c'est de l'inline),



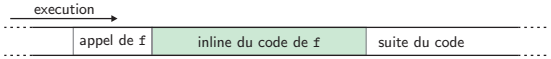
  - soit on fait un saut vers le code de la fonction
    → comment savoir où revenir ?



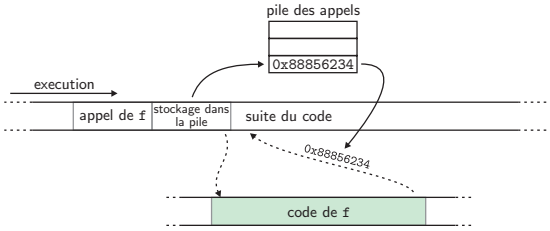
Compilation d'une fonction récursive

Le code produit par un compilateur est une suite d'instruction avec des sauts, c'est tout.

- Un appel à une fonction peut-être traité de deux façons :
  - soit on copie le code de la fonction (c'est de l'inline),



  - soit on fait un saut vers le code de la fonction
    → on utilise une pile d'adresses de retour.



Compilation d'une fonction récursive

Le code produit par un compilateur est une suite d'instruction avec des sauts, c'est tout.

- Une fonction récursive ajoute successivement les adresses de retour dans la pile :
  - n appels imbriqués ont une complexité mémoire en $\Theta(n)$.

- Autres remarques :
  - un appel à une fonction coûte cher
    → compromis entre inline/taille du code et temps d'exécution,
  - certains vieux langages ne gèrent pas les fonctions récursives : si on fait toujours de l'inline, les fonctions non récursives sont beaucoup plus simples à compiler que les récursives.

La récursion terminale
En anglais : tail recursion

- La recursion terminale est un cas particulier de récursion :
  - l'appel récursif est la dernière commande exécutée,
  - la valeur de retour de la fonction est la même que celle retournée par l'appel récursif,
    - → marche aussi s'il n'y a pas de valeur de retour.
- Il est alors possible de convertir la fonction récursive en boucle :
  - un appel de fonction est toujours lourd (écriture dans la pile...)
    - → la récursion terminale permet d'être plus efficace.
- Avec gcc, la récursion terminale est prise en compte quand on utilise l'option d'optimisation -O2 (ou -O3).

Récursion terminale
Exemple de l'algorithme d'Euclide

```
1  int euclide(int x, int y) {
2    if (y == 0) {
3      return x;
4    } else {
5      return euclide(y,x % y);
6    }
7  }
8  int euclide_iter(int x, int y) {
9    int tmp1,tmp2;
10   while (!(y == 0)) {
11     tmp1 = y;
12     tmp2 = x % y;
13     x = tmp1;
14     y = tmp2;
15   }
16   return x;
17 }
```


Ce qu'il faut retenir de ce cours

- Il existe beaucoup d'algorithmes différents pour trier un tableau :
  - les plus basics coûtent $\Theta(n^2)$,
    - → tri par insertion, tri à bulles, tri cocktail...
  - les meilleurs coûtent $\Theta(n \log n)$,
    - → tri fusion, tri rapide, tri par tas, tri par arbre...
- La récursivité permet de décrire facilement certains algorithmes :
  - la complexité d'un algorithme récursif est plus difficile à calculer,
    - → formules pour les algorithmes "diviser pour régner" (cf. poly)
  - le compilation d'une fonction récursive est plus compliquée
    - → programme un peu plus lent dans certains cas.